

基于无结构化网格浅水方程的隐式解法

唐岳灏

(长江工程职业技术学院,湖北 武汉 430212)

摘要:为提高有限体积法计算浅水方程的数值稳定性,采用 Roe 方法近似 Riemann 解计算界面通量,利用 TVD-MUSCL 格式对守恒变量进行重构,推导并建立了高效的隐式计算格式。该格式基于无结构化网格,将计算精度提高到二阶,使用面积加权计算流速梯度,对坡底梯度的处理满足静水平衡要求。为在时间积分上采用隐格式,又导出了控制方程的雅可比矩阵全解析形式,并采用牛顿-拉夫逊方法进行迭代求解。通过对溃坝算例的对比分析,验证该方法的稳定性、和谐性和高效性,同时也证明该算法具有捕捉溃坝激波问题的能力。

关键词:浅水方程; Roe 格式; 非结构网格; 有限体积法; 隐格式

中图法分类号: TV135

文献标志码: A

DOI:10.16232/j.cnki.1001-4179.2015.05.019

用有限体积法计算浅水方程时,目前绝大部分基于无结构网格的数值方法都使用显格式。显格式比隐格式在程序编制上要简单,但由于受到 CFL 条件限制,计算的时间步长一般较小,计算效率受到影响。另外,由于源项的非线性性,显格式的数值稳定性也受到影响^[1-2]。隐格式则在计算稳定性上要比显格式优越,另外由于不受 Courant 数的限制,隐格式还可以和自适应网格技术有机结合^[3],在激波发生的区域加密网格,有效捕捉激波的传递。目前国内学者在隐格式问题上探讨不多:卢康明^[4]等应用算子分裂法剖分浅水方程,建立了隐式格式的通量计算;杨彬^[5]利用 LU-SGS 技术,对隐式算子做近似因式分解,构建稳定高效的隐式算法。本文尝试在二维浅水方程的基础上,利用无结构的三角形网格,建立一个 Godunov 型具有二阶精度的全隐格式算法。这种隐格式基于 Roe 的近似黎曼问题解,在理论推得方程的雅可比矩阵的基础上,采用牛顿-拉夫逊方法(Newton-Raphson)进行迭代求解,具有收敛快、稳定性好、精度高的特点。

1 基本方程

具有守恒形式的二维浅水积分方程可表示为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S (\mathbf{F}^I - \nu_t \mathbf{F}^V) dS = \int_{\Omega} \mathbf{H} d\Omega \quad (1)$$

式中, $\mathbf{U} = [h, hu, hv]^T$; $\mathbf{F}^V = [0, h \frac{\partial u}{\partial x} n_x + h \frac{\partial u}{\partial y} n_y, h \frac{\partial v}{\partial x} n_x + h \frac{\partial v}{\partial y} n_y]^T$; $\mathbf{H} = [0, gh(S_{0x} - S_{fx}), gh(S_{0y} - S_{fy})]^T$;
 $\mathbf{F}^I = [uhn_x + vhn_y, (u^2h + \frac{1}{2}gh^2)n_x + uvhn_y, uvhn_x + (v^2h + \frac{1}{2}gh^2)n_y]^T$ 。 g 为重力加速度, t 为时间, h 为平均水深, u 和 v 分别表示沿 x 和 y 向的流速; n_x 和 n_y 为指向界面外的单位向量在 x 和 y 方向的分量; \mathbf{U} 为守恒变量; \mathbf{F} 是通过界面 S 的通量, 包含无粘黏通量 \mathbf{F}^I 和黏通量 \mathbf{F}^V ; ν_t 是水的动涡流黏滞度; \mathbf{H} 是源项, S_{0x} , S_{0y} 是 x 和 y 方向的底坡坡度, 分别为 $S_{0x} = -\partial z / \partial x$ 和 $S_{0y} = -\partial z / \partial y$; S_{fx} 和 S_{fy} 为底坡的摩擦力, 可用曼宁公式计算, 即 $S_{fx} = n^2 u \sqrt{u^2 + v^2} h^{-4/3}$, $S_{fy} = n^2 v \sqrt{u^2 + v^2} h^{-4/3}$, n 为糙率。方程没有考虑 Coriolis 力和风力的影响。

2 数值离散

式(1)运用 Gauss 公式,将体积分转换为沿控制体

收稿日期:2014-10-25

基金项目:广东省水利科技创新项目

作者简介:唐岳灏,男,讲师,博士,主要从事水力学研究及教学工作。E-mail:64972355@qq.com

边界的线积分,则有

$$\Omega_i \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} = - \sum_{j=k(i)} (\mathbf{F}'_{i,j} - v_i \mathbf{F}_i^v) \Delta l_{i,j} + \mathbf{H}_i \Omega_i = -RHS(\mathbf{U}_i) \quad (2)$$

所有守恒变量均设置在网格单元中心,因此 \mathbf{U}_i 指守恒变量在单元 i 的平均值。 Ω_i 指单元 i 的面积, $k(i)$ 指紧邻单元 i 的单元数, $\mathbf{F}'_{i,j}$ 是从 i 单元到 j 单元的无黏性通量, \mathbf{F}_i^v 和 \mathbf{H}_i 分别是单元 i 内黏性项和源项的平均值。 $\Delta l_{i,j}$ 是 i, j 单元边的长度。 RHS 统指方程的右端项。

2.1 无黏性通量计算

基于 Godunov 格式求解浅水方程的不同方法,主要差异在于为求解黎曼问题而构造不同的网格单元之间交界面的通量计算格式。若采用黎曼问题近似解的 Roe 格式,其无黏性通量可计算如下。

$$\mathbf{F}'_{i,j} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}'(\mathbf{U}_{i,j}^+) + \mathbf{F}'(\mathbf{U}_{i,j}^-) - |\mathbf{A}| (\mathbf{U}_{i,j}^+ - \mathbf{U}_{i,j}^-)] \quad (3)$$

式中, $|\mathbf{A}| = \mathbf{R} \cdot |\mathbf{\Lambda}| \cdot \mathbf{L}$ 为无黏通量雅可比矩阵的大小; $\mathbf{U}_{i,j}^+$ 和 $\mathbf{U}_{i,j}^-$ 分别是 i, j 界面左右的状态变量; \mathbf{R} 和 \mathbf{L} 分别为通量雅可比矩阵 \mathbf{A} ($\mathbf{A} = \partial \mathbf{F}' / \partial \mathbf{U}$) 的右和左特征值矩阵。 $|\mathbf{A}|$ 为矩阵 \mathbf{A} 特征值绝对值的对角矩阵, $|\mathbf{\Lambda}| = \text{diag} [|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|]$, 其中 $\lambda_1 = un_x + vn_y$, $\lambda_2 = un_x + vn_y - c$, $\lambda_3 = un_x + vn_y + c$, u, v 以及 c 为 Roe 定义的通过单元界面的平均流速和波速,具体计算公式可参见文献[6]。

2.2 二阶精度构造

数值处理中的一个关键就是决定界面处左侧和右侧的黎曼状态。对于一阶精度的 Godunov 格式,一般可假设整个单元内的守恒变量都是常数。即单元 i 内 $\nabla \mathbf{U}_i = 0$ 。这也意味着对于单元 i 的所有边 j , 都有 $\mathbf{U}_{i,j}^- = \mathbf{U}_i$ 。为了达到二阶精度,可以采用 MUSCL 格式或变量外延的方法,即将守恒变量用分段线性进行重构,有

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{U}_c + \Phi \nabla \mathbf{U}_c \mathbf{r} \quad (4)$$

此处 \mathbf{r} 为单元中心 C 到单元内任一点 (x, y) 的向量; \mathbf{U}_c 为单元中心 C 处的守恒变量; $\nabla \mathbf{U}_c$ 为梯度向量,一般可以用格林-高斯公式或利用周围单元中心点的守恒变量采用加权回归法来确定。 Φ 为限制器,用于控制间断流体处的数值震荡。因此只要 $\Phi \neq 0$, 公式(4)就为二阶精度。限制器 Φ 有多种选择,例如

$$\Phi = \min(\max[\min(\beta \mathbf{r}_j, 1), \min(\beta \mathbf{r}_j, \beta)]) \quad (5)$$

β 在 1 和 2 之间取值,若 $\beta = 1$, 则为广泛使用的

Minmod 限制器, $\beta = 2$ 时,则变为 Roe 定义的 Superbee 限制器。

2.3 源项处理

在现实中,对于主要由重力驱动的浅水流动,地形处理成为模拟成败的关键因素^[7],不合理的数值处理往往出现静水条件下的虚假流动。其主要原因在于采用有限体积法离散方程时,为将方程写成守恒形式,把水位梯度项分解成静水压力项和底坡项。在静水条件下,静水压力梯度项和底坡项在控制体内往往不能严格抵消,这样两者的平衡被打破,产生虚假流动,即在静水条件下,流速不为零,且水位不再为常数。本文采用 Kuiry^[8] 推导的底坡处理方法,即当采用三角形网格

时,有 $S_{0j} = -\frac{\partial z}{\partial j} = \frac{1}{2A} [(j_2 - j_3)z_1 + (j_3 - j_1)z_2 + (j_1 - j_2)z_3]$, ($j = x$ 或 y)。若定义 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) 和 (x_3, y_3, z_3) 分别为单元 3 个顶点的空间坐标, A 为单元面积,则用三角单元的等效水头 $h_{eq} = \sqrt{\frac{h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2}{3}}$ 来计算静水压力,静水平衡条件是能够满足的。此处 h_1 和 h_2 分别代表单元顶点 1 和 2 的水头。

2.4 黏通量

黏通量 \mathbf{F}^v 的计算需要计算速度的梯度,这主要是针对单元的界面而言。通过界面的速度梯度可以用加权面积平均来计算^[3],例如

$$\nabla \mathbf{U}_{AB} = \frac{1}{\Omega_{AFBE}} (\Omega_{ABF} \nabla \mathbf{U}_{ABE} + \Omega_{ABE} \nabla \mathbf{U}_{ABF}) \quad (6)$$

式中,假设 ABC 和 ABD 为两个相邻的三角单元; E 和 F 分别是两个三角形的形心; $\nabla \mathbf{U}_{ABF}$ 和 $\nabla \mathbf{U}_{ABE}$ 分别是沿路径 ABF 和 ABE 的梯度向量,可用奥高公式求得。 Ω 表示面积。

2.5 时间积分

将公式(2)重写为

$$\frac{(\mathbf{U}\Omega)_i^{t+1} - (\mathbf{U}\Omega)_i^t}{\Delta t} = - [\alpha_i RHS(\mathbf{U}_i^{t+1}) + (1 - \alpha_i) RHS(\mathbf{U}_i^t)] \quad (7)$$

式中, α_i 为控制计算格式的参数,当 $\alpha_i = 0, 1.0$ 和 0.5 时,式(7)分别为一阶精度的显格式、一阶精度的隐格式和二阶精度隐格式。本文取 $\alpha_i = 0.5$ 。由于方程(7)是非线性方程组,若能理论推得该方程的雅可比矩阵,则可以利用具有二阶收敛速度的牛顿拉夫逊方法进行迭代。以下为方便推导,假设某三角单元编号为 0,其周围单元编号分别是 1, 2 和 3,则利用式(7),单元 0 求解 $t + 1$ 时刻的迭代过程可展开写为

$$f(\mathbf{U}_i^{i+1} |_{i=0.3}^s) = \Omega_0 \frac{\mathbf{U}_0^{i+1} |^s - \mathbf{U}_0^i}{\Delta t} + [\alpha_i RHS(\mathbf{U}_i^{i+1} |_{i=0.3}^s) + (1 - \alpha_i) RHS(\mathbf{U}_i^i |_{i=0.3})] = 0 \quad (8)$$

式中,下标 i 表示单元编号;上标 s 表示第 s 次迭代; t 为计算的时间步。为简写方便,下文将 $\mathbf{U}_0^{i+1} |^s$ 写为 \mathbf{U}_0^{i+1} 。根据 Roe 通量的表达式, $t+1$ 时刻的 RHS 可具体展开表达为

$$\begin{aligned} RHS(\mathbf{U}_0^{i+1}, \mathbf{U}_1^{i+1}, \mathbf{U}_2^{i+1}, \mathbf{U}_3^{i+1}) = & 0.5[\mathbf{F}'(\mathbf{U}_1^{i+1}) + \mathbf{F}'(\mathbf{U}_0^{i+1}) - |A_{0,1}|(\mathbf{U}_1^{i+1} - \mathbf{U}_0^{i+1})]\Delta l_{0,1} + \\ & 0.5[\mathbf{F}'(\mathbf{U}_2^{i+1}) + \mathbf{F}'(\mathbf{U}_0^{i+1}) - |A_{0,2}|(\mathbf{U}_2^{i+1} - \mathbf{U}_0^{i+1})]\Delta l_{0,2} + 0.5[\mathbf{F}'(\mathbf{U}_3^{i+1}) + \mathbf{F}'(\mathbf{U}_0^{i+1}) - |A_{0,3}| \times \\ & (\mathbf{U}_3^{i+1} - \mathbf{U}_0^{i+1})]\Delta l_{0,3} - [\mathbf{H}_0(\mathbf{U}_0^{i+1}) + v_i \mathbf{F}_0^V(\mathbf{U}_0^{i+1})]\Omega_0 \end{aligned} \quad (9)$$

符号含义同前文。根据泰勒级数展开公式,包含多变量 $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的非线性方程 f 展开为

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + \Delta \bar{x}) = & f(\bar{x}) + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta \bar{x} + O(\Delta \bar{x}^2) \\ \approx & f(\bar{x}) + \mathbf{J}(\bar{x}) \Delta \bar{x} \end{aligned} \quad (10)$$

式中, \mathbf{J} 为方程 f 的雅可比矩阵。用牛顿拉夫逊方法求解 $f(x) = 0$, 第 s 次迭代过程可写为

$$\bar{x}^{s+1} \Leftarrow \bar{x}^s - \mathbf{J}^{-1}(\bar{x}^s) f(\bar{x}^s) \quad (11)$$

由此,根据式(10),方程(8)可变为

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_0}{\Delta t}(\mathbf{U}_0^{i+1} - \mathbf{U}_0^t) + \alpha_i RHS(\mathbf{U}_i^{i+1} |_{i=0.3}) + \\ (1 - \alpha_i) RHS(\mathbf{U}_i^t |_{i=0.3}) + \sum_{i=0}^3 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}_i} \Delta \mathbf{U}_i = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

按照牛顿法思想,求解原非线性方程(8)变成了一系列线性方程求解的过程。将式(8)代入到式(12)中,重新整理后可得

$$\begin{aligned} -[\frac{\Omega_0}{\Delta t}(\mathbf{U}_0^{i+1} - \mathbf{U}_0^t) + \alpha_i RHS(\mathbf{U}_i^{i+1} |_{i=0.3}) + (1 - \alpha_i) RHS(\mathbf{U}_i^t |_{i=0.3})] = & \alpha_i \sum_{i=1}^3 [0.5(\frac{\partial \mathbf{F}'_i}{\partial \mathbf{U}_i} - |A_{0,i}|) \times \\ & \Delta l_{0,i}] \Delta \mathbf{U}_i + [\frac{\Omega_0}{\Delta t} I + \alpha_i \sum_{i=1}^3 0.5(\frac{\partial \mathbf{F}'_0}{\partial \mathbf{U}_0} + |A_{0,i}|) \Delta l_{0,i} - \\ & \Omega_0 \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial \mathbf{U}_0} - v_i \Omega_0 \frac{\partial \mathbf{F}_0^V}{\partial \mathbf{U}_0}] \Delta \mathbf{U}_0 = \mathbf{J} \Delta \bar{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $\bar{\mathbf{U}}$ 为守恒变量的向量形式,包含 0、1、2、3 四个单元的守恒变量, $\Delta \bar{\mathbf{U}}_i = \bar{\mathbf{U}}_i^{i+1} - \bar{\mathbf{U}}_i^t (i = 0, 1, 2, 3)$ 。

可以看出,每次迭代时,等式的左侧为已知值,右侧 $\Delta \bar{\mathbf{U}}_i$ 为待求的未知数。由此,问题变为右端项的系数矩阵是否能够理论得到,或进一步等价于无粘性通量、黏性通量和源项的雅可比矩阵(即 $\partial \mathbf{F}'/\partial \mathbf{U}$, $\partial \mathbf{F}^V/\partial \mathbf{U}$ 以及 $\partial \mathbf{H}_0/\partial \mathbf{U}$) 是否有解析表达式。如果有,则其逆阵可求,进而迭代过程(13)的计算变为可能。式(13)中 \mathbf{I} 是一个 3×3 的单位阵。利用 Roe 格式计算无粘性通量时,易得

$\partial \mathbf{F}'/\partial \mathbf{U}$ 以及 $\partial \mathbf{H}_0/\partial \mathbf{U}$ 是否有解析表达式。如果有,则其逆阵可求,进而迭代过程(13)的计算变为可能。式(13)中 \mathbf{I} 是一个 3×3 的单位阵。利用 Roe 格式计算无粘性通量时,易得

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - u^2)n_x - uvn_y & 2un_x + vn_y & un_y \\ -uvn_x + (c^2 - u^2)n_y & vn_x & un_x + 2vn_y \end{bmatrix} \quad (14)$$

源项和黏性通量的雅可比矩阵可推求为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial \mathbf{U}} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g(S_{0x} + \frac{7n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{3h^{4/3}}) & -\frac{gn^2(2u^2 + v^2)}{h^{4/3} \sqrt{u^2 + v^2}} & -\frac{gn^2 uv}{h^{4/3} \sqrt{u^2 + v^2}} \\ g(S_{0y} + \frac{7n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{3h^{4/3}}) & -\frac{gn^2 uv}{h^{4/3} \sqrt{u^2 + v^2}} & -\frac{gn^2(u^2 + 2v^2)}{h^{4/3} \sqrt{u^2 + v^2}} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{F}^V}{\partial \mathbf{U}} = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{h}(\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y) & -\frac{1}{h}(\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y) & 0 \\ \frac{v}{h}(\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y) & 0 & -\frac{1}{h}(\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

最后总体雅可比矩阵 \mathbf{J} 应该是个 $(N \times 3) \times (N \times 3)$ 的稀疏阵, N 这里指总的单元数,每个单元都是一个小的 3×3 矩阵。矩阵中使用的 u, v, h 及梯度都取单元中心点的值。方程(11)迭代过程最后变成

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}^{i+1}}^{s+1} \Leftarrow \overline{\mathbf{U}^{i+1}}^s - \mathbf{J}^{-1}[\frac{\Omega_0}{\Delta t}(\mathbf{U}_0^{i+1} - \mathbf{U}_0^t) + \\ \frac{RHS(\mathbf{U}_i^{i+1} |_{i=0.3}) + RHS(\mathbf{U}_i^t |_{i=0.3})}{2}] \end{aligned} \quad (16)$$

\mathbf{J} 的逆阵可使用 \mathbf{LU} 分解,也可以使用某些商用程序,例如 Intel MKL PARDISO。迭代的终止条件可用 L2 范数来衡量,即当 L2 小于某规定的误差限时,迭代被认为收敛,这里定义 $L2 = [\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta \mathbf{U}_i^s)^2]^{\frac{1}{2}}$ 。

3 算例

3.1 斜水跃问题

斜水跃问题由于存在解析解,因此常被用作验证激波捕捉数值方法的标准算例之一^[1]。计算在一个 $40 \text{ m} \times 30 \text{ m}$ 区域展开,其中底侧边墙在 $(10, 0)$ 处向东北向呈 8.95° 收缩,底部高程为 0。初始条件是 $h = 1 \text{ m}$, 流速 $u = 8.57 \text{ m/s}$, $v = 0 \text{ m/s}$ 。由此可计算 Froude 数 $Fr = u/\sqrt{gh} = 2.74$ 。整个计算区域由 40 752 个三角形单元组成,计算结果见图 1。计算达到稳定之后,激波线夹角约为 30° ,下游边界平均水深 1.49982 m ,

流速 $7.955\ 04\ \text{m/s}$, 这和 Hager^[9] 等人的理论预测值 $h_d = 1.499\ 84\ \text{m}$, $u = 7.953\ 08\ \text{m/s}$, $\beta_j = 30^\circ$ 非常接近。计算选取时间步长为 $0.01\ \text{s}$, 若采用显格式, 其 Courant 约为 1.5 。L2 选为 0.001 , 一般迭代 $3 \sim 4$ 次即可收敛。

3.2 二维局部溃坝问题

此算例在一个 $200\ \text{m} \times 200\ \text{m}$ 的平整区域, 坝址设在 $100\ \text{m}$ 处, 水库上游初始水位为 $10\ \text{m}$, 下游初始水位为 $5\ \text{m}$, 左右两侧为墙边界, 堤坝在 y 为 $80 \sim 170\ \text{m}$ 之间瞬时溃决, 即溃坝裂口宽 $90\ \text{m}$, 水流从溃决口向下溃决后形成一个激波运动。假设底部光滑, 上游流量边界为 0 , 下游为自由出流边界。整个区域使用 $22\ 862$ 个三角单元, 计算步长取为 $0.1\ \text{s}$, 对应的 Courant 数约为 1.2 , 隐格式迭代 5 次左右, L2 范数可以收敛到 0.001 以内。图 2 显示 $8\ \text{s}$ 后的溃坝水流传递的情况。本文计算结果和 Valiani 等人结论基本一致^[1,10], 但本文提出的隐格式对计算步长的依赖要比显格式小得多, 显示出良好的计算稳定性。

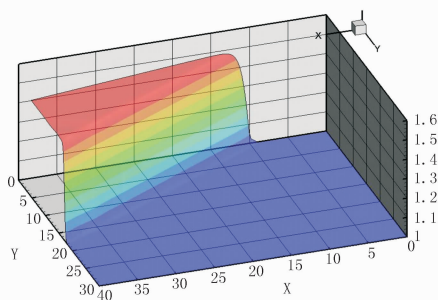


图 1 斜水跃的水面轮廓 (单位: m)

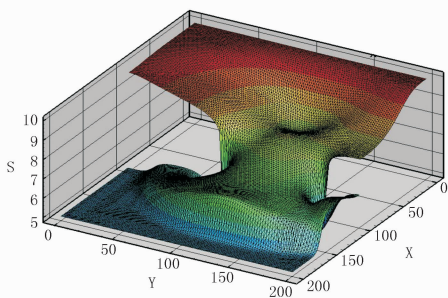


图 2 溃坝 $8\ \text{s}$ 后的水面轮廓 (单位: m)

4 结论

针对溃坝水流激波间断解的特性, 本文采用非结构化网格有限体积法, 提出一个 Godunov 型具有二阶精度的全隐格式算法。其中无黏通量的计算采用 Roe 近似黎曼算子, 采用 MUSCL 重构及限制器的方法获

得空间二阶精度, 源项的处理考虑静水平衡。时间积分采用二阶精度的隐格式。在非线性浅水方程在离散化以后, 雅可比矩阵的解析形式可理论推得, 因而可以采用牛顿-拉夫逊方法进行迭代求解。经验证, 该模型具有良好的数值稳定性, 模型所得的计算结果合理可靠, 此计算格式具有高精度的间断捕捉能力。

参考文献:

- [1] Valiani A, Caleffi V, Zanni A. Finite volume scheme for 2D shallow water equations application to the Malpasset dam - break [C] // the 4th CADAM Workshop, Zaragoza. 1999: 63 - 94.
- [2] Kuiry S N, Pramanik K, Sen D. Finite volume model for shallow water equations with improved treatment of source terms [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008, 134(2): 231 - 242.
- [3] Skoula Z D, Borthwick A G L, Moutzouris C I. Godunov - type solution of the shallow water equations on adaptive unstructured triangular grids [J]. International Journal of Computational Fluid Dynamics, 2006, 20(9): 621 - 636.
- [4] 卢康明, 李光炽. 非结构网格浅水方程隐式解法 [J]. 水动力学研究与进展 (A 辑), 2010, 25(2): 247 - 253.
- [5] 杨彬, 汪德耀. 非结构网格上浅水方程的 LU - SGS 隐式算法 [J]. 河海大学学报: 自然科学版, 2008, 36(4): 483 - 487.
- [6] Anastasiou K, Chan C T. Solution of the 2D shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes [J]. Int. J. For Numer. Method in Fluids, 1997, 24(11).
- [7] 于守兵. 计算二维浅水方程中静水压力项与底坡项的积分平衡法 [J]. 水利水电科技进展, 2009, 29(4): 32 - 35.
- [8] Kuiry, S N, Kiran P, Dhruvajyoti S. Finite volume model for shallow water equations with improved treatment of source terms [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2008, 134(2): 46 - 53.
- [9] Hager W H, Markus S, Oscar J M, Hanif Chaudhry. Supercritical flow near an abrupt wall deflection [J]. Journal of Hydraulic Research, 1994, 32(1): 87 - 95.
- [10] Fennema R J M, Hanif C. Explicit methods for 2 - D transient free surface flows [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1990, 116(8): 11 - 17.

(编辑: 徐诗银)

(下转第 96 页)



参考文献:

[1] 韩璐,黄岁樑,罗阳,等.溶解氧等环境因素对 Alafia 河表层沉积物磷释放影响的模拟研究[J].农业环境科学学报,2010(11):2178-2184.

[2] Berkowitz J,Anderson M A,Graham R C. Laboratory investigation of aluminum solubility and solid-phase properties following alum treatment of lake waters[J]. Water Research, 2005, 39(16):3918-3928.

[3] Huang L,Li L,Huang L,et al. Influence of incubation time on phosphorus sorption dynamics in lake sediments[J]. Journal of Soils and Sediments,2012,12(3):443-455.

[4] Roy E D,Nguyen N T,Bargu S,et al. Internal loading of phosphorus from sediments of Lake Pontchartrain (Louisiana,USA) with implications for eutrophication[J]. Hydrobiologia,2012,684(1):69-82.

[5] Zhu B,Wang Z,Zhang X. Phosphorus fractions and release potential of ditch sediments from different land uses in a small catchment of the upper Yangtze River[J]. Journal of Soils and Sediments,2012,12(2):278-290.

[6] 钱宝,刘凌,肖满,等.环境微界面对湖泊内源磷释放的影响研究[J].水利学报,2013,(3):295-301.

[7] 国家环境保护总局编.水和废水监测分析方法(第四版)[M].北京:中国环境科学出版社,2002.

[8] 金相灿,屠清琰.湖泊富营养化调查规范(第二版)[J].北京:中国环境科学出版社,1990.

[9] 范成新,张路,秦伯强,等.风浪作用下太湖悬浮态颗粒物中磷的动态释放估算[J].中国科学(D辑:地球科学),2003,(8):760-768.

[10] 李斌,贾飞,张银龙,等.沉积物间隙水溶解态磷和铁(Ⅱ)高分辨同步分析方法的研究[J].生态环境学报,2011,(3):485-489.

(编辑:常汉生)

Influence of dissolved oxygen levels in lakes on endogenous phosphorus release

QIAN Bao^{1,2}, LIU Ling², PAN Chang¹

(1. Middle Yangtze River Bureau of Hydrology and Water Resources Survey, Changjiang Water Resources Commission, Wuhan 430012, China; 2. State Key Laboratory of Hydrology - Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Taking Dazong Lake in Lixiahe area of Jiangsu Province as the research object, the in-situ sediment columns of Dazong lake were cultured for 16 days under three different levels of dissolved oxygen (natural state, aerobic and anaerobic state), so as to study the influence of different dissolved oxygen levels on the soluble phosphate (SRP) releasing in the overlying water. The research showed that under different dissolved oxygen concentrations, the content of SRP in the overlying water is strikingly different. Under the anaerobic conditions, the average SRP content in the overlying water is about 7 times higher than that under natural conditions, and under aerobic condition, the average SRP content reduces nearly 80% comparing with the natural condition. Therefore, the anaerobic conditions can significantly promote the release of internal phosphorus compared with the nature state, while the aerobic conditions can inhibit this process, even the phosphorus adsorption phenomenon occurs, which shows that the aerobic condition can reduce the phosphorus content in the overlying water and mitigate the eutrophication of lakes.

Key words: dissolved oxygen; shallow lake; internal phosphorus releasing law; in-situ cultivation experience; Dazong Lake; Jiangsu Province

(上接第 84 页)

An implicit scheme with unstructured grids for shallow water equation

TANG Yuehao

(Changjiang Institute of Technology, Wuhan 430212, China)

Abstract: In order to improve the numerical stability of shallow water equation calculated by Finite Volume Method, by employing Roe's approximate Riemann solution to calculate the interface flux and TVD-MUSCL Format to reconstruct the conservation variable, a high efficient implicit computation scheme is derived. On the basis of the unstructured grids, this format improves the computation accuracy to grade 2. It computes the velocity gradient by the area weight and satisfies the stationary hydraulic pressure equilibrium by handling the bed slope term. In order to use the implicit scheme for the time integration, the full resolution form of Jacobian matrix is analytically derived, which was solved by Newton-Raphson algorithm iteratively. By the comparison with various numerical studies on dam-breaking cases, this computation method is proved to be stable, compatible and efficient with the capability of accurately capturing the shock wave in dam-breaking problems.

Key words: shallow water equation; Roe scheme; unstructured grid; Finite Volume Method; implicit scheme