

# 自然样条半参数模型的 GPS 高程拟合方法

康双双<sup>1</sup>, 张春芳<sup>1</sup>, 李科杰<sup>2</sup>

(1. 长江三峡勘测研究院有限公司(武汉), 湖北 武汉 430074; 2. 湖北省枣阳市规划测绘院, 湖北 枣阳 441200)

**摘要:**利用 GPS 进行水准测量时,需要利用模型将 GPS 测得的大地高转换为正常高。为了提高正常高的转换精度,探讨了在平面拟合法的基础上引入非参数分量,利用自然样条法模型解算数学模型,以提高数据处理精度的方法。在引入非参数分量建立模型的技术上,利用某区域 D 级控制网的数据,对模型拟合精度进行了分析。结果表明,通过选择合适的正则化矩阵和平滑因子,可以提高正常高的拟合精度。  
**关键词:**GPS; 高程似合; 系统误差; 大地高; 正常高; 半参数模型  
**中图法分类号:** P21      **文献标志码:** A      **DOI:**10.16232/j.cnki.1001-4179.2015.14.020

GPS 水准测量是利用 GPS 测量大地高,然后借助似大地水准面转换为正常高,这种方法在工程中得到广泛应用。GPS 测定的基线向量三维坐标差是以 WGS-84 全球地心直角坐标系定义的,经过坐标系转换,可求得以椭球面为基准的高程——大地高,但它无法直接提供正常高。

我国采用的高程系统是以似大地水准面为基准的正常高系统,这种正常高系统主要由水准测量提供。这两种测量技术的基准面不一致,它们之间的差距称为高程异常,其关系式为

$$\zeta = H - h \tag{1}$$

式中, $\zeta$  为高程异常,表示似大地水准面至参考椭球面的距离; $H$  为大地高; $h$  为正常高。

在布设 GPS 网时,通过水准点或者部分水准点对一些点进行统一测量,获得这些点的正常高,再将这些点的高程异常值作为观测值,建立相关的数学模型,解算出模型参数推估未知点的水准高程即为 GPS 高程拟合。传统的高程拟合方法主要有多项式曲线拟合、三次样多条曲线拟合、Akima 曲线拟合、多项式曲面拟合、多面函数法曲面拟合和移动法曲面拟合等<sup>[1]</sup>。本文在平面拟合法的基础上引入非参数分量,利用自然样条半参数模型解算数学模型,使模型更加接近客观实际,提取模型中的偶然误差与系统误差,提高数据处

理精度。

## 1 平面拟合半参数模型

在小区域且较为平坦的范围内,可以考虑用平面逼近局部似大地水准面。设某公共点的高程异常  $\zeta$  与该点的平面坐标关系式为

$$\zeta_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{2}$$

式中, $a_1, a_2, a_3$  为模型待定参数。

如果公共点的数目大于 3,则可列出相应的误差方程为<sup>[2]</sup>

$$v_i = a_1 + a_2x_i + a_3y_i - \zeta_i^0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{3}$$

其矩阵形式为

$$V = B\hat{X} - L \tag{4}$$

$$\text{式中, } V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}; \hat{X} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix};$$
$$L = \begin{bmatrix} \zeta_1^0 \\ \zeta_2^0 \\ \vdots \\ \zeta_n^0 \end{bmatrix}$$

对于传统的参数模型,利用最小二乘原理可求得:

$$\hat{X} = (B^T P B)^{-1} B^T P L \tag{5}$$
式中, $P$  为观测值的权。

但参数模型仅仅考虑了模型的偶然误差,而在实际测量中往往会有系统误差的存在,因此在模型中可以引入非参数分量代表系统误差,以提高数据解算精度。

$$V = B \hat{X} + \hat{s} - L \tag{6}$$
式中, $L$  为高程异常值; $V$  为  $L$  改正数向量; $\hat{X}$  为模型待定参数向量的平差值; $B$  为系数矩阵; $\hat{s}$  为描述未知函数关系的模型误差量的平差值。

(6)式加入附加系统参数后,使得普通最小二乘法无法得到唯一解,需要在平差准则中引入正规化矩阵与平滑因子<sup>[3-4]</sup>,即

$$V^T P V + \alpha s^T R s = \min \tag{7}$$
式中, $\alpha$  为平滑因子,在  $V$  与  $s$  间起平滑作用; $R$  为适当给定的正规化矩阵,对于正则化矩阵  $R$  的选取,本文选用自然样条法。

当  $R$  为正定矩阵时,可以把平差问题归结为条件极值问题,根据条件极值的拉格朗日函数法,构造函数

$$\emptyset = V^T P V + \alpha s^T R s + 2K(B \hat{X} + \hat{s} - L - V) \tag{8}$$
式中, $K$  为拉格朗日常数。

令  $\frac{\partial \emptyset}{\partial V} = 0, \frac{\partial \emptyset}{\partial \hat{s}} = 0, \frac{\partial \emptyset}{\partial \hat{X}} = 0$ ,可得

$$\hat{X} = (B^T P B)^{-1} B^T P (L - \hat{s}) \tag{9}$$
$$\hat{s} = [P(I - H) + \alpha R]^{-1} P(I - H)L \tag{10}$$
$$\hat{L} = B \hat{X} + \hat{s} = H(\alpha)L \tag{11}$$

式中, $H = B(B^T P B)^{-1} B^T P, H(\alpha) = H + (I - H)[P(I - H) + \alpha R]^{-1} P(I - H)$

2 正则矩阵与光滑参数的选取

关于正则矩阵的选取,本文选用自然样条光滑方法<sup>[5-6]</sup>。根据自然样条的光滑性质可知, $R$  矩阵满足如下条件。

$$\int_{t_i}^{t_n} (s''(t))^2 dt = s^T R s \tag{12}$$
$$R = F G^{-1} F^T \tag{13}$$

关于矩阵  $F$  与  $G$  的选取,对于函数区间 $[a, b]$  有

$$F_{ji} = \begin{cases} h_i^{-1} & j = i \\ -(h_i^{-1} + h_{i+1}^{-1}) & j = i + 1 \\ h_{i+1}^{-1} & j = i + 2 \\ 0 & j = \text{其它} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n - 2 \tag{14}$$

$$G_{ji} = \begin{cases} h_i/6 & j = i - 1 & i = 2, \cdots, n - 2 \\ (h_i + h_{i+1})/3 & j = i & i = 1, \cdots, n - 2 \\ h_{i+1}/6 & j = i + 1 & i = 1, \cdots, n - 3 \\ 0 & j = \text{其它} & |i - j| \geq 2 \end{cases} \tag{15}$$

式中, $h_i = t_{i+1} - t_i; i = 1, 2, \cdots, n - 1; a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b$ 。

本文采用广义交叉核实方法选取光滑参数  $\alpha$ ,通过迭代方法求出广义交叉核实函数值最小,以平衡偶然误差与系统误差。

$$GCV(\alpha) = \frac{V^T P V}{(1 - \mu)^2} \tag{16}$$
式中, $\mu = tr[H(\alpha)]/n$

3 算例分析

本文算例分析数据选用某区域 D 级控制网数据<sup>[2]</sup>,见表 1。

表 1 某市 D 级数据资料			m
点 号	x	y	高程异常
1	3603896.338	488554.991	8.231
2	3597602.072	493112.170	8.193
3	3583394.689	493247.948	8.591
4	3588911.922	501631.873	8.732
5	3599474.072	496795.052	8.514
6	3589780.327	487658.722	8.404
7	3592458.486	492333.502	8.492
8	3593597.532	496071.596	8.562
9	3596342.473	487810.764	8.332
10	3588187.786	494796.664	8.577
11	3599206.341	486605.780	8.252
12	3586122.185	497178.121	8.656
13	3593665.841	483924.860	8.266
14	3597682.256	498583.115	8.585
15	3590354.599	489991.618	8.442
16	3589809.665	488760.289	8.426
17	3588152.720	488971.778	8.439

该区域 D 级控制网布设了 17 个控制点,对其进行 GPS 观测和三等水准测量。

选 1,6,9,11,13,15,17 号点作为已知点,进行平面拟合与三次样条的半参数拟合。

利用平面拟合解算出的模型参数为

$$Xls = (44.2452, -12.8984, 2.1442)^T$$

通过半参数进行三次样条拟合时,采用广义交叉核实方法选取的  $\alpha = 1.6$ ,解算出的模型参数为: $X = (45.9127, -13.5030, 2.2468)^T$

表 2 及图 1 为两种拟合方法的精度对比。通过表 2 及图 1 可以看出,采用半参数三次样条的拟合精度优于平面拟合。

表 2 两种方案拟合后的残差统计结果对比				m
方 案	最大值	最小值	残差精度	
平面拟合	0.0144	-0.0091	0.010926	
半参数三次样条拟合	0.0031	-0.0093	0.0058734	

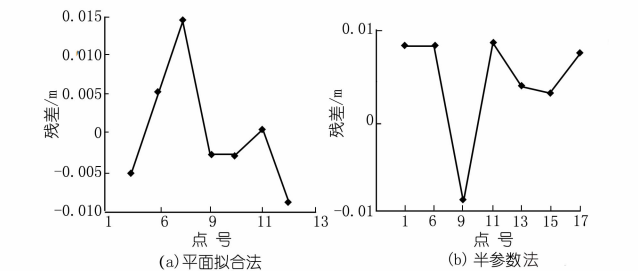


图 1 两种拟合方法精度对比

根据求得的模型参数推算检核点 2,3,4,5,7,8,10,12,14,16 点的高程异常,结果如图 2 及表 3 所示。

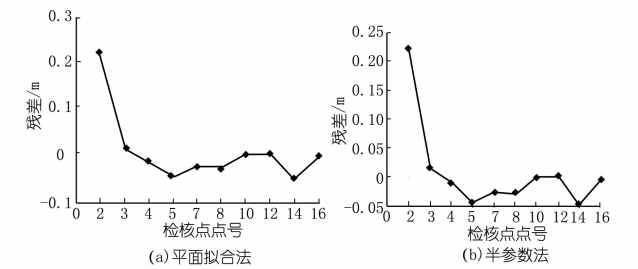


图 2 两种拟合方法检核点精度对比

从图 2 及表 3 可以看出,利用三次样条半参数模型计算出的模型参数推算检核点残差,精度优于平面

表 3 两种方案检核点残差统计结果对比				m
方 案	最大值	最小值	残差外符合精度	
平面拟合	0.2247	-0.0496	0.0792	
半参数三次样条拟合	0.2207	-0.0495	0.0781	

4 结 论

通过实际算例,分别选用平面拟合参数模型与半参数模型进行高程拟合,通过选取合适的正则化矩阵与平滑因子,半参数模型拟合与推估的精度都要优于参数模型的精度,并且可以提取出模型中的系统误差,有很强的适用性。

参考文献:

[1] 徐绍铨,李振洪,吴云孙,等. GPS 高程拟合系统的研究[J]. 武汉测绘科技大学学报,1999,24(4):336-340.

[2] 雷晓霞. 基于重力与 GPS 水准组合法的大地水准面精化研究[D]. 西安:长安大学,2005.

[3] 孙海燕,吴云. 半参数回归与模型精化[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2002,27(2):172-174.

[4] 潘雄. 半参数测量模型在 GPS 高程拟合中的应用[J]. 武汉工业学院学报,2004,23(2):99-101.

[5] 丁士俊. 测量数据的建模与半参数估计[D]. 武汉:武汉大学,2005.

[6] 吴云,孙海燕,马学忠,等. 半参数估计的自然样条函数法[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2004,29(5):398-401.

(编辑:常汉生)

GPS elevation fitting method of natural spline semi parameter model

KANG Shuangshaung<sup>1</sup>,ZHANG Chunfang<sup>1</sup>,LI Kejie<sup>2</sup>

(1. Sanxia Exploration and Survey Co. , Wuhan 430074, China; 2. Zaoyang Planning and Surveying Institute of Hubei Province, Zaoyang 441200, China)

**Abstract:** In GPS leveling survey, the geodetic height surveyed by GPS needs to be transferred to normal height. In order to improve the transferring accuracy, the non-parameter component is introduced into the plane fitting model by using natural spline model. Based on the established model by introducing non-parameter component, using the data of a D-class control network, the accuracy of the model fitting is analyzed. The analysis results show that selecting the appropriate regularization matrix and smoothing factor can improve fitting accuracy of normal height.

**Key words:** GPS; elevation fitting; systematic error; geodetic height; normal height; semi parameter model